На правах рукописи

Чунаев Петр Владимирович

Аппроксимация наипростейшими дробями и их модификациями

01.01.01 — Вещественный, комплексный и функциональный анализ

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Казань 2013

Работа выполнена на кафедре функционального анализа и его приложений ФГБОУ ВПО «Владимирский государственный университет имени А. Г. и Н. Г. Столетовых».

Научный руководитель:	Данченко Владимир Ильич, доктор физико–математических наук, профессор, ФГБОУ ВПО «Владимирский государственный университет имени А. Г. и Н. Г. Столетовых»
Официальные оппоненты:	Каюмов Ильгиз Рифатович, доктор физико–математических наук, ФГАОУ ВПО «Казанский (Приволжский) федеральный университет»;
	Старков Виктор Васильевич, доктор физико–математических наук, профессор, ФГБОУ ВПО «Петрозаводский государственный университет»
Ведущая организация:	ФГБОУ ВПО «Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского»

Защита диссертации состоится 19 сентября 2013 г. в 16 ч. 00 мин. на заседании Диссертационного совета Д 212.081.10 при Казанском (Приволжском) федеральном университете по адресу: 420008, г. Казань, ул. Кремлевская, д. 35, Институт математики и механики им. Н. И. Лобачевского, ауд. 610.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке Казанского (Приволжского) федерального университета по адресу: 420008, г. Казань, ул. Кремлевская, д. 35.

Автореферат разослан “ ” августа 2013 г.

Ученый секретарь Диссертационного совета
кандидат физико-математических наук, доцент — Е. К. Липачев

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Работа посвящена вопросам интерполяции и аппроксимации *наипростейшими дробями* (н. д.), т.е. рациональными функциями

$$\rho_0(z) \equiv 0, \quad \rho_n(z) = \rho_n(\{z_k\}; z) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{z - z_k}, \qquad z,\ z_k \in \mathbb{C}, \quad n \in \mathbb{N}, \qquad (1)$$

и некоторыми их модификациями. Внимание к н. д. было обращено работами А. Макинтайра и У. Фукса, А. А. Гончара, Е. П. Долженко[1], посвященными некоторым экстремальным задачам теории рациональных приближений. По-видимому, впервые задачей приближения посредством н. д. занимались Дж. Кореваар и Ч. Чуи[2]. Ими была предложена конструкция н. д. для аппроксимации аналитических функций класса Бергмана-Берса в односвязных областях; при этом полюсы н. д. подбирались на границах этих областей. Одна из мотивировок такой аппроксимации заключена в простом и важном физическом смысле н. д.: они задают (с точностью до постоянных множителей и операции комплексного сопряжения) плоские поля различной природы, создаваемые равновеликими источниками, расположенными в точках z_k. Следовательно, задачу аппроксимации посредством н. д. можно интерпретировать как определение источников z_k, приближенно создающих заданное поле.

Дальнейшие исследования аппроксимативных свойств н. д. были инициированы известной задачей Е. А. Горина о наименьшем уклонении н. д. от нуля на действительной оси при определенных ограничениях на полюсы z_k. В разное время ею занимались Е. А. Горин, Е. Г. Николаев, А. О. Гельфонд, В. Э. Кацнельсон, В. И. Данченко[3] и др. В 1999 году для н. д. со свободными полюсами

[1] *Macintyre A., Fuchs W.* Inequalities for the logarithmic derivatives of a polynomial // J. London Math. Soc. 1940. S1-15, №3. Pp. 162-168; *Гончар А. А.* О наилучших приближениях рациональными функциями // Докл. АН СССР. 1955. Т. 100, №2. С. 205–208; *Долженко Е. П.* Оценки производных рациональных функций // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1963. Т. 27, №1. С. 9–28.

[2] *Korevaar J.* Asymptotically neutral distributions of electrons and polynomial approximation // Ann. of Math. 1964. V. 80. Pp. 403-410; *Chui C. K.* On approximation in the Bers spaces // Proc. Amer. Math. Soc. 1973. V. 40. Pp. 438–442.

[3] *Горин Е. А.* Частично гипоэллиптические дифференциальные уравнения в частных производных с постоянными коэффициентами // Сиб. матем. журн. 1962. Т. 3, №5. С. 506–508; *Николаев Е. Г.* Геометрическое свойство корней многочленов // Вестн. МГУ. Серия 1: Матем., мех. 1965. №5. С. 23–26; *Гельфонд А. О.* Об

был установлен следующий аналог известной теоремы С. Н. Мергеляна о полиномиальных аппроксимациях[4]: любую функцию, непрерывную на компакте $K \subset \mathbb{C}$ со связным дополнением и аналитическую в его внутренних точках, можно с любой точностью равномерно приблизить на K посредством н. д. Затем было показано, что несмотря на существенно более простую конструкцию н. д. по сравнению с многочленами, наименьшие уклонения н. д. и многочленов от функций широкого класса имеют одинаковые порядки малости[5]. Это позволило получить для н. д. аналоги классических полиномиальных теорем Д. Джексона, С. Н. Бернштейна, А. Зигмунда, В. К. Дзядыка, Дж. Л. Уолша. Были предприняты попытки получить аналоги теоремы П. Л. Чебышева об альтернансе, и это удалось сделать в случае аппроксимации постоянных функций[6]. Однако в общем случае был обнаружен ряд неординарных аппроксимативных свойств н. д., не присущих полиномам. Оказалось, что, вообще говоря, не существует прямой связи между альтернансом и наилучшим приближением, н. д. наилучшего приближения не обязана быть единственной[7]. О некоторых других особенностях аппроксимаций посредством н. д. говорится ниже.

В недавних работах[8] изучалось приближение на неограниченных мно-

оценке мнимых частей корней многочленов с ограниченными производными от логарифмов на действительной оси // Матем. сб. 1966. Т. 71, №113. С. 289–296; *Кацнельсон В. Э.* О некоторых операторах, действующих в пространствах, порожденных функциями $\frac{1}{z-z_k}$ // Теория функций, функциональный анализ и их приложения. 1967. Вып. 4. С. 58–66; *Данченко В. И.* Оценки расстояний от полюсов логарифмических производных многочленов до прямых и окружностей // Матем. сб. 1994. Т. 185, №8. С. 63–80.

[4] *Данченко В. И., Данченко Д. Я.* О равномерном приближении логарифмическими производными многочленов// Теория функций, ее приложения и смежные вопросы: Материалы шк.-конференции, посвящ. 130-летию Д. Ф. Егорова. Казань, 1999. С. 74–77.

[5] *Данченко В. И., Данченко Д. Я.* О приближении наипростейшими дробями// Матем. заметки. 2001. Т. 70. №4. С. 553–559; *Косухин О. Н.* Об аппроксимативных свойствах наипростейших дробей// Вестник Московского ун-та. Сер. 1. Матем. Мех. 2001. №4. С. 54–58.

[6] *Данченко В. И., Кондакова Е. Н.* Критерий возникновения особых узлов при интерполяции наипростейшими дробями // Тр. МИАН. М.: МАИК, 2012. Т. 278. С. 49—58; *Комаров М. А.* Критерий наилучшего приближения констант наипростейшими дробями // Матем. заметки. 2013. Т. 93, №2. С. 209–215.

[7] *Данченко В. И., Кондакова Е. Н.* Чебышевский альтернанс при аппроксимации констант наипростейшими дробями // Тр. МИАН. М.: МАИК, 2010. Т. 270. С. 86–96; *Komarov M. A.* Examples related to best approximation by simple partial fractions// J. of Math. Sci. 2012. Vol. 184, №4. Pp. 509–523

[8] *Протасов В. Ю.* Приближения наипростейшими дробями и преобразование Гильберта // Изв. РАН. Сер. матем. 2009. Т. 73, №2. С. 123–140; *Бородин П. А., Косухин О. Н.* О приближении наипростейшими дробями на действительной оси // Вестник Московского ун-та. Сер. 1. Матем. Мех. 2005. №1. С. 3–8; *Данченко В. И.*

жествах. Установлено, например, что каждая непрерывная на действительной оси $\mathbb{R}$ функция с нулевым значением на бесконечности в равномерной метрике с любой точностью приближается н. д. (О. Н. Косухин, П. А. Бородин). В случае $L_p(\mathbb{R})$ с конечными $p > 1$ класс аппроксимируемых функций резко сужается: все такие функции представляются рядами н. д., сходящимися в $L_p(\mathbb{R})$. Это обстоятельство способствовало возникновению теории рядов н. д. (В. Ю. Протасов, И. Р. Каюмов и др.).

Изучалась n-кратная интерполяция аналитических функций посредством н. д. Паде, получены соответствующие теоремы существования и единственности, найдены оценки скорости сходимости интерполяционных процессов[9]. Рассматривалась и задача *простой* интерполяции, т.е. с простыми узлами, которая, как оказалось, имеет ряд существенных особенностей по сравнению с n-кратной и полиномиальной. Например, как показали Я. В. Новак, М. А. Комаров, Е. Н. Кондакова и др.[10], такая задача не всегда разрешима, а если разрешима, то не обязательно единственным образом. В связи с этим была разработана теория *обобщенной* интерполяции таблиц, допускающих бесконечно удаленные элементы, которая охватывает и обычную интерполяцию. В рамках этой теории в терминах *особых* узлов получена единообразная классификация структуры таблиц, допускающих обычную или обобщенную интерполяцию[11].

Полезной модификацией н. д. при интерполяции и аппроксимации анали-

---

О сходимости наипростейших дробей в $L_p(\mathbb{R})$ // Матем. сб. 2010. Т. 201, №7. С. 53–66; *Каюмов И. Р.* Сходимость рядов наипростейших дробей в $L_p(\mathbb{R})$ // Матем. сб. 2011. Т. 202, №10. С. 87–98; *Каюмов И. Р.* Необходимое условие сходимости наипростейших дробей в $L_p(\mathbb{R})$ // Матем. заметки. 2012. Т. 92, №1. С. 149—152.

[9] *Данченко В. И., Данченко Д. Я.* О приближении наипростейшими дробями//Матем. заметки. 2001. Т. 70. №4. С. 553–559; *Косухин О. Н.* О некоторых нетрадиционных методах приближения, связанных с комплексными полиномами: Дисс....канд. физ.-мат. наук. М.: МГУ им. М.В. Ломоносова, 2005; *Рамазанов А. К.* Приближение наипростейшими рациональными дробями в пространстве Харди $H_2(D)$ // Теория функций, ее приложения и смежные вопросы: Материалы Казан. междунар. шк.-конференции. Казань, 2003. С. 177-178

[10] *Новак Я. В.* О наилучшем локальном приближении наипростейшими дробями // Матем. заметки. 2008. Т. 84, №6. С. 882–887; *Komarov M. A.* Uniqueness of a simple partial fraction of best approximation // J. of Math. Sci. 2011. Vol. 175, №3. P. 284–308; *Кондакова Е. Н.* Интерполяция наипростейшими дробями// Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Матем. Мех. Информ. 2009. Т. 9, №2. С. 30–37

[11] *Данченко В. И., Кондакова Е. Н.* Критерий возникновения особых узлов при интерполяции наипростейшими дробями // Тр. МИАН. М.: МАИК, 2012. Т. 278. С. 49—58.

тических функций являются h-*суммы* вида

$$H_n(z) = H_n(h, \{\lambda_k\}; z) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k h(\lambda_k z), \qquad z,\ \lambda_k \in \mathbb{C}, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{2}$$

где h — аналитическая *базисная* функция[12] (при фиксированной базисной функции процедура аппроксимации аналитической функции f состоит в правильном выборе чисел $\lambda_k = \lambda_k(f, n)$). Отметим, что любая н. д. представляется h-суммой при специальном выборе базисной функции. Аппарат h-сумм неоднократно применялся[13] в численном анализе. Применялись и специальные рациональные функции, представляющие собой отношения разностей н. д. При незначительном усложнении конструкции по сравнению с н. д. такие функции обладают значительно более сильными аппроксимативными свойствами[14].

Цель работы. Разработка новых методов аппроксимации, интерполяции и экстраполяции посредством н. д., h-сумм и отношений разностей н. д.

Методы исследования. Классические методы теории функций комплексного переменного, рациональных аппроксимаций, численного анализа, а также оригинальные методы интерполяции и экстраполяции h-суммами.

Научная новизна. Основные результаты работы являются новыми и состоят в следующем.

1. Получены окончательные результаты о радиусе круга сходимости и скорости сходимости интерполяционных h-сумм к интерполируемой функции.

2. Предложен новый метод построения н. д. Паде на основе интеграла Эрмита, получен явный вид остаточного члена интерполяции и найдены новые оценки ее погрешности.

3. Разработан метод экстраполяции посредством h-сумм, получен явный вид остаточного члена экстраполяции и найдена точная оценка ее погрешности,

---

[12] *Данченко В. И.* Об аппроксимативных свойствах сумм вида $\sum_k \lambda_k h(\lambda_k z)$// Матем. заметки. 2008. Т. 83. №5. С. 643–649

[13] *Фрянцев А. В.* О численной аппроксимации дифференциальных полиномов// Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Мат. Мех. Информ. 2007. Т. 7, №2. С. 39–43; *Фрянцев А. В.* О полиномиальных решениях линейных дифференциальных уравнений// УМН. 2008. Т. 63, №3 (381). С. 149–150

[14] *Данченко В. И.* Оценки производных наипростейших дробей и другие вопросы// Матем. сб. 2006. Т. 197, №4. С. 33–52

дано сравнение рассматриваемого метода с классическими полиномиальными методами.

4. Исследован метод аппроксимации посредством рациональных функций специального вида, представляющих собой отношения разностей н. д., и даны его приложения к вычислению рациональных функций общего вида. Показано, что в ряде случаев этот метод можно использовать как выгодную альтернативу схеме Горнера.

Практическая и теоретическая значимость. Результаты диссертации носят теоретический характер. Они могут быть использованы в теории рациональных аппроксимаций в комплексной области, а также в некоторых нетрадиционных задачах приближения, связанных с н. д. и h-суммами.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались на следующих научных семинарах и конференциях: Международная конференция по математической теории управления и механике (Суздаль, 2009); Международная конференция «Современные проблемы анализа и преподавания математики» (Москва, 2010); XV Саратовская зимняя школа «Современные проблемы теории функций и их приложения» (Саратов, 2010); Воронежская зимняя школа «Современные методы теории функций и смежные вопросы» (Воронеж, 2011); X Казанская летняя школа по теории функций, ее приложениям и смежным вопросам (Казань, 2011); Конференция по теории аппроксимации и анализу Фурье (Барселона, 2011); VI Петрозаводская международная конференция «Комплексный анализ и приложения» (Петрозаводск, 2012); научный семинар под руководством д.ф.-м.н., проф. М. С. Беспалова, А. А. Давыдова и В. И. Данченко (Владимир, 2009–2013); научный семинар по анализу университетов Барселоны (Барселона, 2011); научный семинар в рамках исследовательской программы «Комплексный анализ и смежные вопросы» (Севилья и Малага, 2013).

Публикации автора. По теме диссертации опубликовано *11* научных работ, *три* из которых — в рецензируемых научных журналах, рекомендованных ВАК для публикации результатов диссертации. В совместных работах с научным руководителем вклад каждого из соавторов составляет 50%.

Структура и объем диссертации. Диссертация включает в себя *введение*, *три главы*, разделенные на параграфы, *заключение* и *список литературы*. Общий объем диссертации — 94 страницы; список литературы содержит 56 библиографических ссылок.

Основное содержание работы

Во *введении* обосновывается актуальность рассматриваемых вопросов, приводится их история и кратко излагаются основные результаты диссертации.

Глава 1 посвящена вопросам n-кратной интерполяции (и аппроксимации) Паде с узлом $z = 0$ аналитических в окрестности этого узла функций f посредством h-сумм вида (2). Всюду в первой главе для удобства считаем, что h — фиксированная базисная функция, аналитическая в единичном круге $|z| < 1$. Считаем также, что все функции задаются рядами Маклорена:

$$f(z) = \sum\nolimits_{k=0}^{\infty} f_k z^k, \qquad h(z) = \sum\nolimits_{k=0}^{\infty} h_k z^k. \tag{3}$$

Отметим, что маклореновское разложение соответствующей h-суммы (2) сходится в круге $|z| < \min_k |\lambda_k|^{-1}$. Как обычно, n-кратная интерполяция означает, что $|f(z) - H_n(z)| = O(|z|^n)$ при $z \to 0$.

Пусть $h_{m-1} \neq 0$, если $f_{m-1} \neq 0$; введем числа $s_m(h, f)$ по правилу:

$$s_m(h, f) = 0 \ \Leftarrow\ f_{m-1} = 0, \qquad s_m(h, f) = \frac{f_{m-1}}{h_{m-1}} \ \Leftarrow\ f_{m-1} \neq 0, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Теорема 1.2 [1]. *Пусть $s_m = s_m(h, f)$ и $|s_m| \leqslant a^m$ при всех натуральных m и некотором $a > 0$. Пусть при каждом фиксированном n числа $\lambda_k = \lambda_k(h, f, n)$ в h-сумме H_n являются решением алгебраического уравнения*

$$\lambda^n - \sigma_1 \lambda^{n-1} + \sigma_2 \lambda^{n-2} + \ldots + (-1)^n \sigma_n = 0, \tag{4}$$

где коэффициенты σ_k находятся по рекуррентным формулам (Ньютона)

$$\sigma_1 = s_1, \quad \sigma_m = (-1)^{m+1} m^{-1} \left(s_m + \sum\nolimits_{j=1}^{m-1} (-1)^j s_{m-j} \sigma_j \right), \quad m = \overline{2, n}. \tag{5}$$

Тогда справедливы следующие заключения.

(a) Суммы H_n осуществляют n-кратную интерполяцию функции f в узле $z = 0$.

(*b*) *Функция f определена и аналитична в круге $|z| < a^{-1}$, а суммы H_n определены и аналитичны в кругах $|z| < (1-\varepsilon_n)a^{-1}$, где ε_n — положительные числа, удовлетворяющие соотношениям $\varepsilon_n \in (0,1)$ и*

$$\varepsilon_n^2 - (1-\varepsilon_n)^{n+1} = 0, \qquad \varepsilon_n \sim 2n^{-1}\ln n, \quad n \to \infty. \tag{6}$$

(*c*) *Имеет место равномерная сходимость $H_n(z) \rightrightarrows f(z)$, $n \to \infty$, в круге $|z| \leqslant (1-\delta)\,a^{-1}$ при любом фиксированном сколь угодно малом $\delta \in (0,1)$. Кроме того, для любого $\theta \in (0,1)$ при достаточно больших $n \geqslant n_0(a,h,\delta,\theta)$ справедлива оценка*

$$|f(z) - H_n(z)| \leqslant \theta^{-1}\delta^{-1}(1-\theta\delta)^n, \qquad |z| \leqslant (1-\delta)a^{-1}. \tag{7}$$

Теорема 1.3 [1]. *В условиях теоремы* 1.2 *радиус a^{-1} круга сходимости $H_n(z)$ к $f(z)$ не может быть увеличен, а в оценке* (7) *нельзя заменить $1-\theta\delta$ числом, меньшим $1-\delta$ (при фиксированном множителе $\theta^{-1}\delta^{-1}$).*

Ранее результат, аналогичный теореме 1.2, был установлен в работе[15], где, однако, не рассматривался вопрос о точности радиуса круга сходимости $H_n(z)$ к $f(z)$ и скорости этой сходимости, и вместо (6) и (7) были указаны весьма грубые оценки, носящие скорее качественный характер.

Доказательства теорем 1.2 и 1.3 основаны на следующем вспомогательном утверждении, представляющем и самостоятельный интерес.

Лемма 1.4 [1]. *Пусть для комплексных чисел λ_k их степенные суммы*

$$S_m = S_m(\lambda_1,\ldots,\lambda_n) = \sum\nolimits_{k=1}^{n} \lambda_k^m \tag{8}$$

удовлетворяют неравенствам $|S_m| \leqslant a^m$, $m = \overline{1,n}$, с некоторым $a > 0$. Тогда

$$|\lambda_k| < a(1-\varepsilon_n)^{-1}, \quad k = \overline{1,n},$$

где ε_n определяются как в (6).

Приведен пример, показывающий, что утверждение леммы 1.4 нельзя значительно уточнить в следующем смысле (ср. с (6)): найдется набор чисел $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ такой, что их степенные суммы $|S_m| \leqslant a^m$, $m = \overline{1,n}$, и $|\lambda_1| = a(1-O(1/n))^{-1}$ при достаточно больших $n \geqslant n_0$.

[15] *Данченко В. И.* Об аппроксимативных свойствах сумм вида $\sum_k \lambda_k h(\lambda_k z)$ // Матем. заметки. 2008. Т. 83, №5. С. 643–649

В следующей части первой главы дано построение интерполяционной н. д. в виде интеграла Эрмита. Такой подход позволяет получить явный вид остаточного члена интерполяции и простую его оценку. Н. д. ρ_ν (порядка $0 \leqslant \nu \leqslant n$) интерполяции с n-кратным узлом $z = 0$ функции f, аналитической в некоторой его окрестности, будем называть н. дробью Паде; она определяется единственным образом из соотношения

$$|f(z) - \rho_\nu(z)| = O(|z|^n), \qquad z \to 0. \tag{9}$$

Пусть γ — спрямляемый жорданов контур, содержащий внутри себя точку $z = 0$, и пусть функция f аналитична на замыкании области $G(\gamma)$, ограниченной контуром γ. Кроме того, будем предполагать, что хотя бы один из коэффициентов f_m, $m = \overline{0, n-1}$, разложения (3) отличен от нуля. Н. д. Паде ищется в виде интеграла Эрмита

$$J_n(z) = J_n(f, Q; z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(\zeta)\, \frac{R_n(\zeta) - R_n(z)}{(\zeta - z)\, R_n(\zeta)}\, d\zeta, \qquad z \in G(\gamma),$$

где

$$R_n(z) = \frac{z^n}{Q(z)}, \quad Q(z) = \prod_{k=1}^{\nu} (z - z_k) = z^\nu + q_{\nu-1} z^{\nu-1} + \ldots + q_0, \tag{10}$$

а числа ν и $z_k \neq 0$ требуется определить. Эта задача приводит к нелинейной системе уравнений для степенных сумм (см. обозначения (3) и (8)): $S_m = -f_{m-1}$, $m = \overline{1, n}$. Известно, что такая система всегда имеет и притом единственное решение $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, причем в силу предположения на коэффициенты f_m хотя бы одна из его компонент отлична от нуля. Обозначим число таких отличных от нуля компонент через $\mu = \mu(f)$, $1 \leqslant \mu \leqslant n$, а сами эти компоненты — через $\lambda_1, \ldots, \lambda_\mu$ (некоторые из них могут совпадать). Нами доказано, что интеграл J_n является н. д. Паде (удовлетворяющей условию (9)), тогда и только тогда, когда $\nu = \mu$, а нули z_k многочлена Q являются решением системы (см. (3))

$$\sum\nolimits_{k=1}^{\mu} z_k^{-m} = -f_{m-1}, \qquad m = \overline{1, n}, \qquad 1 \leqslant \mu = \mu(f) \leqslant n.$$

При этом J_n является логарифмической производной многочлена Q. Этот критерий (а также способ вычисления Q) можно записать в виде следующей теоремы. Введем алгебраическое уравнение

$$T_n(\lambda) = \lambda^n - \tau_1 \lambda^{n-1} + \tau_2 \lambda^{n-2} + \ldots + (-1)^n \tau_n = 0,$$

коэффициенты которого определяются по рекуррентным формулам

$$\tau_1 = -f_0, \quad \tau_m = (-1)^m m^{-1} \left(f_{m-1} + \sum\nolimits_{j=1}^{m-1} (-1)^j f_{m-j-1} \tau_j \right), \quad m = \overline{2, n}.$$

Теорема 1.4 [2]. *Интеграл Эрмита J_n является н. д. Паде n-кратной интерполяции функции f для единственного многочлена Q вида* (10), *имеющего корни $z_k = \lambda_k^{-1}$, где λ_k, $k = \overline{1, \mu}$, — отличные от нуля корни многочлена T_n. При этом*

$$J_n(z) = \frac{Q'(z)}{Q(z)} \qquad \text{и} \qquad Q(z) = \frac{(-1)^\mu}{\tau_\mu} z^n T_n \left(\frac{1}{z} \right). \tag{11}$$

Как уже отмечалось, формула Эрмита позволяет получить остаточный член в достаточно простой форме; справедлива

Теорема 1.5 [2]. *Остаточный член n-кратной интерполяции имеет вид*

$$f(z) - J_n(f, Q; z) = \frac{1}{Q(z)} \sum_{k=n}^{\infty} z^k \sum_{m=0}^{\mu} q_m f_{k-m}, \quad |z| \leqslant \min_{\zeta \in \gamma} |\zeta|, \tag{12}$$

где многочлен Q определяется по формуле (11).

Формула (12) в ряде случаев позволяет оценивать остаточный член интерполяции с помощью весьма простого анализа. Приведем одну такую оценку в случае, когда коэффициенты интерполируемой функции (3) по модулю ограничены членами некоторой геометрической прогрессии.

Теорема 1.6 [2]. *Если $|f_{m-1}| \leqslant a^m$ для натуральных m и некоторого $a > 0$, то при $|z| < r < (1 - \varepsilon_n) a^{-1}$ имеем*

$$|f(z) - J_n(f, Q; z)| \leqslant \frac{a}{1 - a|z|} \frac{|z|^n}{r^n} \left(\frac{1 - \varepsilon_n + ar}{1 - \varepsilon_n - ar} \right)^n \ln \frac{er}{r - |z|},$$

где числа ε_n определяются как в (6).

Вторая глава посвящена экстраполяции аналитических функций h посредством их h-сумм вида (2). Здесь же проведено сравнение метода экстраполяции h-суммами с классическими полиномиальными методами.

Пусть $a > 1$ и $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, $n \geqslant 2$, — набор комплексных чисел, для которых элементарные симметрические многочлены

$$\sigma_m = \sigma_m(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \sum\nolimits_{1 \leqslant j_1 < \ldots < j_m \leqslant n} \lambda_{j_1} \cdots \lambda_{j_m}, \qquad m = \overline{1, n},$$

удовлетворяют равенствам

$$\sigma_1 = 1, \qquad \sigma_m = \frac{(-1)^{m+1}}{m!} \prod_{k=1}^{m-1} (a\,k - 1), \qquad m = \overline{2,n}. \tag{13}$$

Нами показано, что для таких чисел и их степенных сумм (8) имеем:

$$\max_{k=1,\ldots,n} |\lambda_k| < a - (a-1)n^{-1}, \qquad S_m = a^{m-1}, \quad m = \overline{1,n}. \tag{14}$$

Опишем идею экстраполяции. Пусть h — функция, аналитическая в некоторой области $D_r = \{z:\ |z| < r\}$, $0 < r \leqslant \infty$. Через $\tilde{H}_n$ обозначим $\tilde{h}$-сумму с числами $\lambda_k = \lambda_k(n,a)$, удовлетворяющими равенствам (13), взяв в качестве базисной функцию $\tilde{h}(z) = h(z/a)$. Оказывается, что такие суммы при возрастании n аппроксимирует функцию h сколь угодно точно на компактных подмножествах области D_r, причем, как первоначально было установлено в работе [2],

$$\left| h(z) - \tilde{H}_n(z) \right| \leqslant (1 + a\,n) \sum_{m=n}^{\infty} |h_m||z|^m, \qquad z \in D_r. \tag{15}$$

Из оценки в (14) вытекает, что модули аргументов слагаемых в сумме $\tilde{H}_n$ строго меньше $|z|$, точнее

$$\left| \frac{\lambda_k}{a} z \right| \leqslant \beta_n |z| < |z|, \quad \beta_n = 1 - \frac{a-1}{an} < 1.$$

Тем самым получается экстраполяционная формула $h(z) \approx \tilde{H}_n(z)$ в том смысле, что значения функции h в точках z выражаются через ее значения в точках $\lambda_k z/a$ с меньшими модулями. Указанный процесс экстраполяции можно повторить, т.е. провести рекурсивный процесс восстановления значений функции h по уже восстановленным ее значениям. Тогда получится μ-кратная $\tilde{h}$-сумма вида

$$\tilde{H}_n^{(\mu)}(z) = \sum_{k_1,\ldots,k_\mu=1}^{n} \lambda_{k_1} \cdots \lambda_{k_\mu} h\left(\frac{\lambda_{k_1} \cdots \lambda_{k_\mu}}{a^\mu} z \right).$$

С увеличением кратности экстраполяции модули аргументов слагаемых в таких суммах убывают как геометрическая прогрессия $\beta_n^\mu |z|$. С использованием оценки (15) был получен первый результат о сходимости μ-кратной экстраполяции. Было показано, что при любом $r_0 \in (0,1)$ и для любой целой функции

h конечного порядка существует последовательность $\{\mu_n\}$ такая, что суммы $\tilde{H}_n^{(\mu_n)}(z)$ равномерно сходятся к $h(z)$ на окружности $|z| = 1$, причем все узлы экстраполяции лежат в круге $|z| < r_0 < 1$. Другими словами, любая целая функция конечного порядка может быть сколь угодно точно экстраполирована на единичную окружность по ее значениям из круга радиуса $r_0 < 1$.

Основная теорема второй главы существенно улучшает оценку (15) и распространяет последний результат о сходимости с целых функций на произвольные аналитические. Приведем ее формулировку.

Теорема 2.3 [3]. *Остаточный член μ-кратной экстраполяции имеет вид*

$$h(z) - \tilde{H}_n^{(\mu)}(z) = \sum_{m=n}^{\infty} h_m \left(1 - \left(\frac{S_{m+1}}{a^m}\right)^{\mu}\right) z^m, \quad z \in D_r,$$

и справедлива (не зависящая от кратности μ) оценка погрешности

$$\left|h(z) - \tilde{H}_n^{(\mu)}(z)\right| \leqslant \sum_{m=n}^{\infty} |h_m||z|^m, \qquad z \in D_r. \tag{16}$$

Если функция h аналитична в области D_r с $r > 1$, $0 < r_0 < 1$, а числа μ_n удовлетворяют равенствам

$$\mu_n = \left[\ln r_0 \cdot \ln^{-1}\left(1 - \frac{a-1}{an}\right)\right] + 1 \quad (\text{где } [\,\cdot\,] \text{ означает целую часть}),$$

то при $n \to \infty$ суммы $\tilde{H}_n^{(\mu_n)}(z)$ равномерно сходятся к $h(z)$ на окружности $|z| = 1$, причем все узлы экстраполяции лежат в круге $|z| < r_0 < 1$.

Рассматриваемый метод обладает некоторыми преимуществами перед полиномиальной экстраполяцией. Например, естественным образом снимается проблема выбора узлов экстраполяции. Кроме того, используемый аппарат обладает важным свойством локализации узлов: при увеличении кратности экстраполяции с фиксированным n со скоростью геометрической прогрессии уменьшается радиус круга, в котором лежат все узлы экстраполяции. При этом относительная погрешность экстраполяционной формулы почти не возрастает (см. теорему 2.3).

Отметим еще, что во второй главе приводится пример, когда метод $\widetilde{h}$-сумм дает более точные результаты, чем традиционный метод экстраполяции многочленами Лагранжа.

В *третьей главе* рассматриваются некоторые применения в численном анализе h-сумм и специальных рациональных дробей, представляющих собой отношения разностей н. д.:

$$\theta(z) = \frac{\rho_{n_1}(z) - \rho_{n_2}(z)}{\rho_{n_3}(z) - \rho_{n_4}(z)}, \qquad z \in \mathbb{C}. \tag{17}$$

Следующий результат о численном дифференцировании получен теми же методами, что и теорема 1.2 первой главы.

Теорема 3.1 [1]. *Пусть функция h аналитична в круге $|z| < 1$. Тогда*

$$z^s h^{(s)}(z) \approx (-1)^s s!\, h(z) + \sum_{p=1}^{s} A_{s,p} \sum_{k=1}^{n} \lambda_{k,p} h(\lambda_{k,p} z), \qquad s \in \mathbb{N}, \tag{18}$$

где $A_{s,p} = (-1)^{s+p} \left(C_s^{s-p}\right)^2 (s-p)!$ и для каждого фиксированного p числа $\lambda_{k,p}$ вычисляются по формулам (4) и (5) при $s_k = s_{k,p} = (k+p-1)!/(k-1)!$, $k = \overline{1,n}$. Формула (18) применима в круге $|z| < a^{-1}$, где a — положительное число, удовлетворяющее неравенствам $s_{k,s} \leqslant a^k$ при всех натуральных k. При тех же, что и в теореме 1.2, значениях n, θ, δ абсолютная погрешность формулы (18) в круге $|z| \leqslant (1-\delta)\, a^{-1}$ не больше $s\, \theta^{-1}\delta^{-1}(1-\theta\delta)^n$.

Дроби вида (17) используются нами для приближенного вычисления многочленов и рациональных функций общего вида. Пусть $R(z) = P(z)/Q(z)$, где P и Q — комплексные многочлены. При фиксированном натуральном p положим

$$\theta(p, R; z) = \frac{q_p'(z)/q_p(z)}{R'(z)/R(z)},$$

где

$$q_p(z) = \sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!} R^k(z) = \frac{G(z)}{Q^p(z)}, \qquad G(z) = \sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!} P^k(z) Q^{p-k}(z).$$

Очевидно, дроби $\theta(p, R; z)$ имеют вид (17). Известно, что рациональная функция R достаточно быстро аппроксимируется такими дробями[16]: $|\theta(p, R; z) - R(z)| \leqslant 2e^{|R(z)|}\, |R(z)|^{p+1}/p!$ во всех точках z, где $5|R(z)| \leqslant p$. На это неравенство опирается следующее утверждение о вычислении больших значений многочленов.

[16] *Данченко В. И.* Оценки производных наипростейших дробей и другие вопросы // Матем. сб. 2006. Т. 197, №4. С. 33–52

Теорема 3.3 [2]. *Пусть задан отличный от константы многочлен* $Q(z)$ *и* $G_0(z) = \sum_{k=0}^{p} \frac{Q^{p-k}(z)}{k!}$, $p \geqslant 1$. *Тогда во всех точках* z, *в которых* $|Q(z)| \geqslant 5$, *имеем*

$$Q(z) \approx \frac{Q'(z)/Q(z)}{p\,Q'(z)/Q(z) - G_0'(z)/G_0(z)}, \quad \textit{точнее} \quad Q(z) = \frac{1}{\theta(p, Q^{-1}; z) + \delta(z)}, \tag{19}$$

где $|\delta(z)| \leqslant 1/(2|Q(z)|^p p!) \leqslant 1/(2 \cdot 5^p p!)$.

Отметим, что при вычислении н. д. в (19) операнды имеют тот же порядок, что и аргументы. При непосредственном же вычислении многочленов, например, по схеме Горнера, операнды, вообще говоря, имеют порядок $|z|^n$, что при увеличении $|z|$ может приводить к определенным вычислительным неудобствам и быстрому росту абсолютной погрешности. В третьей главе приводятся результаты численных экспериментов при фиксированном количестве знаков после запятой, когда приближение (19) дает более точные результаты, чем схема Горнера.

Заключение

Диссертация посвящена специальным разделам теории рациональных аппроксимаций, в ней изучаются аппроксимативные свойства н. д. и их модификаций (h-сумм, отношений разностей н. д.). Эта тематика является новой и актуальной и исследуется многими отечественными и зарубежными авторами. Основные результаты диссертации носят теоретический характер. Разработаны новые методы интерполяции и экстраполяции посредством н. д. и h-сумм. Получен ряд окончательных теорем о скорости сходимости соответствующих интерполяционных процессов и области их применимости. Даны приложения к численному анализу (интерполяционные и экстраполяционные формулы, формулы численного дифференцирования, приближенного вычисления многочленов и рациональных функций общего вида и др.). Все основные результаты опубликованы в международных и центральных российских журналах.

Список работ, опубликованных автором по теме диссертации

В журналах из перечня ВАК

1. Чунаев, П. В. Об одном нетрадиционном методе аппроксимации / П. В. Чунаев // Труды Математического института имени В. А. Стеклова. — М.: МАИК Наука / Интерпериодика, 2010. — Т. 270. — С. 281-287.

2. Danchenko, V. I. Approximation by simple partial fractions and their generalizations / V. I. Danchenko, P. V. Chunaev // Journal of Mathematical Sciences. — New York: Springer, 2011. — Vol. 176, №6. — Pp. 844-859.

3. Чунаев, П. В. Об экстраполяции аналитических функций суммами вида $\sum_k \lambda_k h(\lambda_k z)$ / П. В. Чунаев // Математические заметки. — М.: МАИК Наука/Интерпериодика, 2012. — Т. 92, №5. — С. 794-797.

Прочие

4. Чунаев, П. В. Об аппроксимации λ-суммами / П. В. Чунаев // Тезисы докладов Международной конференции по математической теории управления и механике (Суздаль, 2009). — М.: МИАН, 2009. — С. 147–148.

5. Чунаев, П. В. Об аппроксимации суммами вида $\sum_k \lambda_k h(\lambda_k z)$ / П. В. Чунаев // Современные проблемы теории функций и их приложения: Материалы XV Саратовской зимней школы (Саратов, 2010). — Саратов: Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, 2010. — С. 183–184.

6. Данченко, В. И. Формула Эрмита для наипростейших дробей / В. И. Данченко, П. В. Чунаев // Современные проблемы анализа и преподавания математики: Материалы Международной научной конференции, посвященной 105–летию академика С. М. Никольского (Москва, 2010). — М.: Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, 2010. — С. 19.

7. Данченко, В. И. Об экстраполяции посредством λ-сумм / В. И. Данченко, П. В. Чунаев // Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам (Суздаль, 2010): Тезисы докладов. — М.: МИАН, 2010. — С. 72–73.

8. Данченко, В. И. Аппроксимация многочленов посредством специальных рациональных дробей / В. И. Данченко, П. В. Чунаев // Современные методы теории функций и смежные проблемы: Материалы Воронежской зимней математической школы (Воронеж, 2011). — Воронеж: Воронежский государственный университет, 2011. — С. 115–116.

9. Данченко, В. И. Об экстраполяции целых функций суммами вида $\sum_k \lambda_k h(\lambda_k z)$ / В. И. Данченко, П. В. Чунаев // Труды Математического центра им. Н. И. Лобачевского / Казанское математическое общество. Теория функций, ее приложения и смежные вопросы // Материалы X Казанской летней научной школы-конференции. — Казань: Казанское математическое общество, 2011. — Т. 43. — С. 114–116.

10. Чунаев, П. В. Об экстраполяции аналитических функций h-суммами / П. В. Чунаев // Комплексный анализ и его приложения, Тезисы VI Петрозаводской международной конференции (Петрозаводск, 2012). — Петрозаводск: Петрозаводский государственный университет, 2012. — С. 79–82.

11. Chunaev, P. Extrapolation of analytic functions by sums of the form $\sum_k \lambda_k h(\lambda_k z)$ / P. Chunaev // CRM Preprint. — Bellaterra: CRM, 2012.